DOPPIOZERO

La creazione continua della matematica

Giuseppe O. Longo

2 Agosto 2017

Tra il 1824 e il 1826 l'embriologo francese Antoine Etienne Renaud Augustin Serres (1786-1868) avanzò l'ipotesi che l'ontogenesi ricapitoli la filogenesi, cioè che le tappe attraverso le quali un organismo vivente si sviluppa, dalla cellula ovarica fecondata all'embrione e all'individuo completo, riassumano, specie nelle prime fasi, prenatale e perinatale, le fasi dell'evoluzione propria della specie di cui fa parte l'organismo considerato. La tesi di Serres fu ripresa e approfondita dal grande biologo, filosofo e artista tedesco Ernst Heinrich Haeckel (1834-1919), convinto darwiniano. Anche se oggi non è più accettata in ambito scientifico, la teoria della ricapitolazione rimane tuttavia affascinante e suggerisce, nell'apprendimento di una materia, di far ripercorrere al discente le fasi dello sviluppo storico di quella disciplina.

Questa impostazione, in genere, non è adottata nei corsi universitari, nei quali si preferisce esporre la materia in modo sistematico, specie per quanto riguarda le discipline esatte, come la matematica: se ciò risulta più facile e comodo, soprattutto per il docente, si sottrae agli studenti il piacere di partecipare, sia pure indirettamente, all'emozione della scoperta. La sistemazione rigorosa, astratta e asettica, mette in evidenza solo i risultati e spesso impedisce di afferrare le tappe e le ragioni del progresso. Non si è partecipi dei problemi, dei drammi, dei palpiti e delle delusioni, insomma di tutti gli aspetti che imprimono in ogni disciplina il marchio degli umani: lo smarrimento di fronte al mistero, l'audacia delle conquiste, lo stupore davanti ai risultati.

Ricordo la grande impressione che fece su di me, studentello diciottenne di analisi matematica, la lettura di un aureo libriccino, *Piccola storia della matematica*, dello scrittore, romanziere e matematico austriaco Egmont Colerus: le teorie, i teoremi e tutto l'ambaradan che assorbivo un po' con gli occhi chiusi (vedi Federigo Tozzi) alle lezioni dell'ottimo Giovanni Prodi, acquistarono grazie alla prospettiva storica, una giustificazione, quasi direi una redenzione. All'estremo opposto della *Piccola*

storia si collocava il grande trattato di Bourbaki, *Eléments de mathématique*, un vero e proprio monumento che mirava alla completezza, al rigore, all'autocoerenza. Per fortuna lo lessi (in parte, beninteso) solo dopo la laurea, quando potevo considerarmi vaccinato nei confronti del rigore. Forse per una sorta di compensazione, ai dieci volumi del trattato i bourbakisti avevano aggiunto gli *Elementi di storia della matematica*, che sfogliai distrattamente, ripensando al mio Colerus.

Il libro di Gabriele Lolli, matematico e logico a tutto tondo, è di lettura gradevole (ma non del tutto agevole per il lettore non matematico, al quale consiglio di non incaponirsi sulle dimostrazioni e sulle formule, ma di seguire la trattazione da una certa altezza) e, soprattutto nella prima parte, adotta l'impostazione storica, spaziando dalla Cina all'India al Mediterraneo arabo e poi all'Italia e all'Europa, collegando i progressi della matematica ai problemi pratici, di calcolo e di misurazione, che soprattutto i mercanti e gli agrimensori si trovavano ad affrontare. L'autore ci fa scoprire metodi per far di conto ormai dimenticati a favore di impostazioni successive, forse più semplici ma non necessariamente più ingegnose, e così si vede come "nella storia della matematica si riscontrino alterne vicende di permanenza e di oblio di conoscenze, l'ondivaga fortuna della consapevolezza della loro importanza e del loro sfruttamento o al contrario la disattenzione o disinteresse per le loro potenzialità" (p. 15), che è un riconoscimento del carattere sociale e culturale della matematica nel suo farsi: "La loro [dei numeri] natura sembra quella di un prodotto culturale più che qualcosa di ontologicamente solido" (p. 16).



Dunque si pone il solito problema: gli enti matematici esistono in qualche senso e noi li scopriamo, oppure sono da noi costruiti? Nel 1960 il fisico ungherese naturalizzato americano Eugene Wigner (Nobel 1963) scrisse un articolo famoso, *L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*, dove si poneva il problema di come potesse la matematica, in apparenza libera creazione della nostra mente, descrivere e prevedere i fenomeni della natura, che certo non dipendono da noi. Dopo Wigner (e anche prima di lui) il problema è stato affrontato da innumerevoli studiosi, ma una risposta soddisfacente non si è ancora trovata. Tuttavia accettiamo con gratitudine questo dono meraviglioso, anche se, come dice Wigner, non lo comprendiamo e non lo meritiamo.

È interessante notare come il legame primordiale tra i numeri e le grandezze da misurare se per un verso consente lo sviluppo delle varie famiglie numeriche, dall'altra ostacola fortemente il riconoscimento di altre. A lungo ai numeri naturali (1, 2, 3...) sono stati attribuite valenze metafisiche e sacre e sono stati accettati solo i numeri interi positivi e le frazioni positive, mentre i numeri negativi sono stati respinti in quanto innaturali e assurdi: come si può concepire una superficie negativa o un volume negativo? E proprio le difficoltà soprattutto psicologiche incontrate da alcune generalizzazioni (numeri negativi, immaginari, irrazionali: tutte denominazioni dal sapore svalutativo rispetto alla soda concretezza dei numeri interi positivi) confermano i forti legami della matematica con gli aspetti culturali e pratici della quotidianità. Ma via via anche gli interi negativi e le

frazioni (numeri razionali) negative si sono conquistati un posto nella vasta e ramificata selva dei numeri.

Questa accettazione fu agevolata dalla tentazione di eseguire le operazioni anche sulle entità negative, il che indica come siano le operazioni e non i numeri sui quali esse si effettuano la vera ossatura della compagine numerica: “Non sono i numeri i protagonisti, ma le operazioni, le funzioni, le relazioni su di essi; come in un film, i numeri sono le comparse, solo qualcuno emerge; altrimenti è la trama che importa” (p. 22).

Non è possibile dar conto in una breve recensione della ricchezza di questo libro: basti dire che da una parte ci sono i matematici, in antico quasi tutti anonimi e perduti nell’oscurità del tempo fino a Leonardo Pisano (Fibonacci), e siamo intorno al Duecento: di lì in poi i grandi scopritori sono ricordati per nome, da Cardano a Gauss a Eulero a Kronecker a Cantor a Gödel e via... enumerando; dall’altra ci sono le loro creazioni, intuizioni, dimostrazioni, che contribuiscono a fare della matematica e in particolare del vasto paesaggio dei numeri una disciplina affascinante e sempre più articolata grazie alle continue estensioni e generalizzazioni.

Un giusto spazio è dedicato a certi numeri, come π e soprattutto *e*, fino ad arrivare a una delle tantissime formule dovute a Eulero

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

che secondo alcuni (per esempio Richard Feynman) è la più bella di tutta la matematica poiché lega tra loro, in modo esemplarmente semplice e sorprendente, i cinque numeri fondamentali *e*, π, *i*, 1, 0. Si aprono così squarci baluginanti sulle profondità della matematica, che acquistano suggestioni quasi mistiche con la scoperta dei numeri transfiniti. E le estensioni non si fermano, generando quella che Lolli chiama giustamente “la foresta dei numeri”, dove crescono piante esotiche che non vengono illustrate a scuola: i quaternioni, l’aritmetica modulare, l’algebra delle matrici, i numeri *p*-adici e appunto i numeri transfiniti, con la scoperta sconcertante che non tutti gli infiniti sono uguali tra loro. E in tutto ciò la storia dimostra invariabilmente che “All’inizio le idee nuove sono sempre più complicate... rispetto a quello che diventano in seguito” (p. 75),

e questo è uno dei motivi per cui spesso si preferisce un’esposizione sistematica dei risultati, trascurando le tortuosità degli sviluppi storici: insomma si preferisce fornire l’immagine un tantino ingannevole di una matematica pura e cristallina, pacificata, decantata dalle scorie e lontana dal travaglio maieutico.

Ci si avvicina così alla visione strutturalista della matematica: “non importa cosa sono i numeri, ma come si ragiona parlando dei numeri” (p. 104).

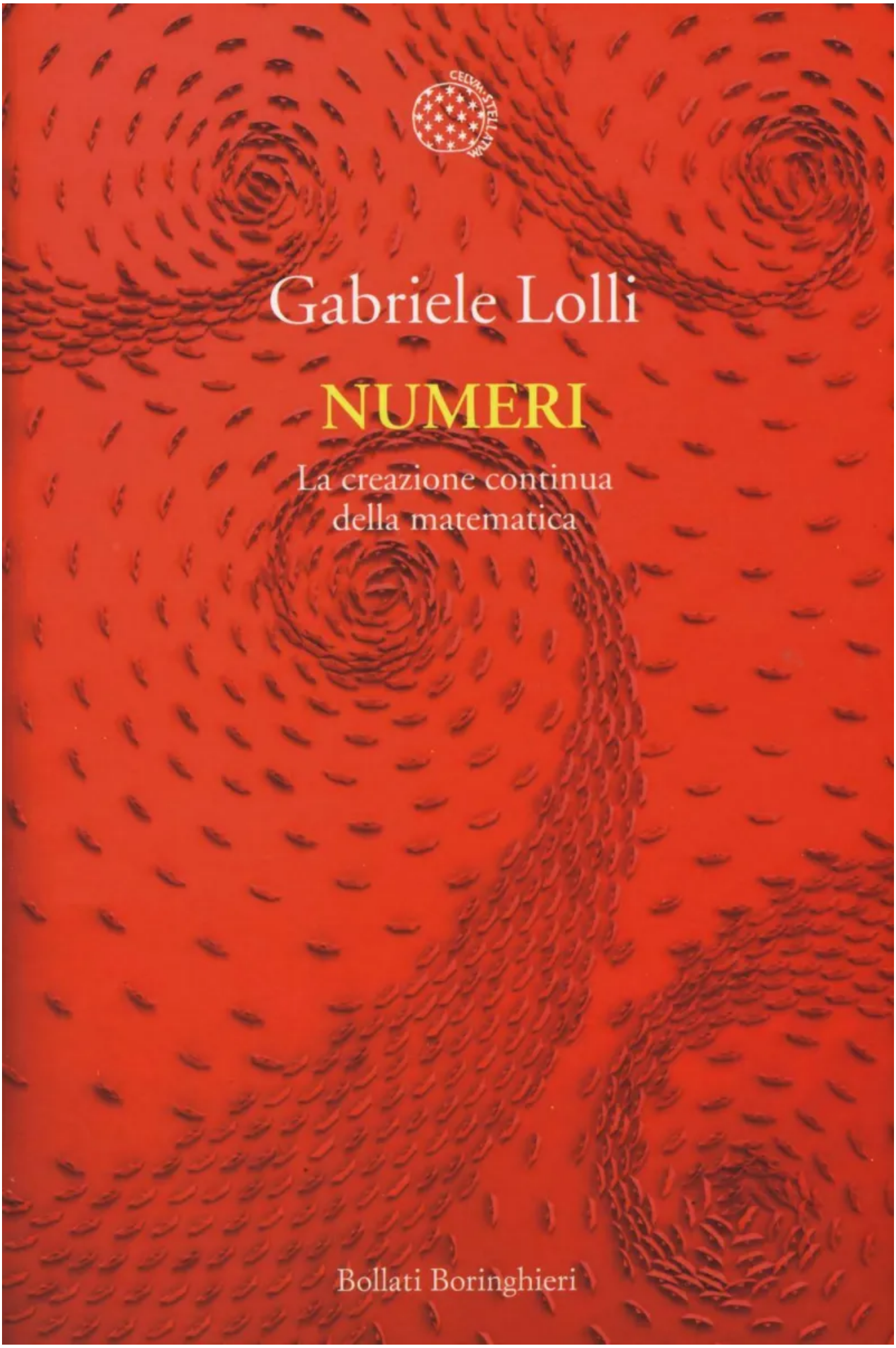
Nella visione moderna sono importanti dunque le strutture, le operazioni e le loro proprietà, riassunte in un insieme possibilmente scarno di assiomi. L’impostazione assiomatica consente di riconoscere che configurazioni con elementi, operazioni e relazioni dotati di nomi diversi sono in realtà la stessa struttura; si passano così in rassegna certe strutture fondamentali: gli anelli, i gruppi, i corpi, i campi. Per esempio, un anello è un insieme di elementi su cui sono definite due operazioni (che per semplicità possiamo pensare come l’addizione e la moltiplicazione) che hanno certe proprietà, mentre tra gli elementi ve ne sono alcuni (lo zero e magari l’unità) dotati di attributi particolari… Che poi gli elementi dell’anello siano gli interi pari o i quaternioni o una certa famiglia di polinomi o altro ancora, questo è meno essenziale.

Si giunge, con la forza delle generalizzazioni e dell’assiomatica, all’ultimo capitolo, intitolato “Conclusione surreale” e che si apre con una parabola genetica (ispirata al libro della Genesi) dovuta al guru dell’informatica Donald E. Knuth: si scopre una nuova versione della Creazione dei numeri, che non si arresta dopo sette giorni, ma continua, come in certe varianti cosmologiche continua la creazione della materia. Nascono così i numeri surreali, aggettivo che, a questo punto, non dovrebbe più sorprendere nessuno, inventati (o scoperti?) nei primi anni settanta da John Conway, quello del Gioco della Vita. Senza addentrarci nei meandri della loro definizione, diciamo solo che i numeri surreali corrispondono a “un metodo di generazione uniforme di tutti i numeri noti in un’unica famiglia che comprende interi, razionali, reali, infinitesimi e infiniti, ordinali e cardinali infiniti… e prevede che le operazioni si applichino a tutti indipendentemente dalla specie a cui appartengono, per esempio reale per ordinale, in una prospettiva di ibridazione, o incrocio interraziale” (p. 124).

Si compie a questo modo il passaggio dall'impostazione storica, avventurosa ma frammentaria, basata sulla risoluzione di problemi particolari, a un'impostazione assiomatico-strutturale, che riprende, generalizzandola, la teoria delle proporzioni dei Greci e il metodo delle sezioni con cui alla fine dell'Ottocento Richard Dedekind aveva introdotto i numeri reali a partire dai razionali. Il capitolo si chiude con un'asserzione, "La creazione dei numeri dunque continua" (p. 129), che giustifica il sottotitolo del libro e apre prospettive vertiginose su quello che può ancora diventare la matematica quando parla di sé stessa, sciogliendo ogni residuo legame con la realtà esterna.

Gabriele Lolli, Numeri. La creazione continua della matematica, Bollati Boringhieri, Torino 2015, pagg. 138, € 14,00.

Se continuiamo a tenere vivo questo spazio è grazie a te. Anche un solo euro per noi significa molto.
Torna presto a leggerci e SOSTIENI DOPPIOZERO


Gabriele Lolli
NUMERI
La creazione continua
della matematica
Bollati Boringhieri